De geschiedenis van het procentrekenen gaat verder terug dan het begin van de zeventiende eeuw, toen de eerste druk van de *Cijfferinge* uitkwam. Reeds de Grieken konden al tegen betaling geld lenen bij de bank. De rente werd vastgesteld per 100 drachmen. In de Middeleeuwen en daarna kende men het verschijnsel, dat boeren een tiende deel van de opbrengst van hun land moesten afstaan aan de kerk. In Brabant vindt men nog steeds landerijen die in het verleden van een dergelijke belasting vrijgesteld waren.'Tiendvrij' werden deze stukken land genoemd. Toen zich in de twaalfde eeuw de handel en dus ook het boekhoudkundig rekenen begonnen te ontwikkelen, behoorde daartoe ook het rekenen met procenten.
Simon Stevin (1548-1620) stelde *Tafelen van Interest* samen om het berekenen van rente gemakkelijker en sneller te maken. Soortgelijke 'tafels van rente', of beter 'kortingstafels', vinden we heden ten dage in grootwinkelbedrijven, als er weer uitverkoop is.
Het woord procent (percent) komt van 'per honderd', of 'ten honderd', zoals in de opgave uit het boek van 1763. Op een gegeven moment is ook het symbool % uitgevonden.
Zo te zien werden aanvankelijk de procenten alleen gebruikt in de context van rente, maar momenteel komen ze in allerlei andere contexten voor. Denk maar aan 'geen alcohol in het verkeer' met alcoholpromillage en -percentage. Of aan de samenstelling van vezels in kleding (50% wol). Andere contexten zijn bevolkingssamenstelling, werkeloosheid, ziekteverzuim, AOW, loonsverhoging, winst en verlies, belasting, prijsverlaging, inflatie, koopkracht, uitverkoop, BTW, de discount, stoffen oplossen in een vloeistof, legeringen, kijkdichtheid, hypotheek, ...
Procenten zijn niets anders dan verhoudingen. Als je wilt weten welke verhouding groter uitvalt, 17 op de 35 of 19 op de 39, dan kun je beide verhoudingen herleiden tot 'per honderd'; 17 : 35 ≈ 49 : 100 en 19 : 39 ≈ 49 : 100. Allebei dus ongeveer 49 procent. Reken je wat nauwkeuriger, dan blijkt de eerste ongeveer 48,6 en de tweede ongeveer 48,7 procent te zijn. (Je vindt dat bijvoorbeeld door de delingen 17 / 35 \... en 19 / 39 \... te maken, en af te lezen 'hoeveel honderdsten' er zijn. Hiermee is dan ook weer een verbinding gelegd met de decimale breuken).

Achtergronden

In de veertiende voordracht van *Erziehungskunst,Methodisch-didactisches* koppelt Rudolf Steiner de behandeling van de rente, de procenten en het disconto aan de leeftijd van twaalf jaar. Hij stelt dat rond deze leeftijd de laatste instincten van de ziel overwonnen moeten worden door het oordeelsvermogen. Duidend op de renteberekening voegt hij er de waarschuwing aan toe, dat we met de genoemde stof niet te laat moeten zijn. Op de leeftijd van twaalf jaar zijn in het kind de innerlijke egoïstische gevoelens nog niet ontwaakt. Het werken met procenten in de context van renteberekeningen, appeleert dan nog niet aan een mogelijk sluimerende hebzucht.
In de dertiende voordracht van *Erziehungskunst, Seminarbesprechungen und Lehrplanvorträge* ligt de nadruk op de
overgang van interestformule ($R = \frac{K \times P \times T}{100}$) naar de algebra. In die voordracht komen ook andere onderwerpen aan de orde, die destijds maatschappelijk relevant waren, zoals rabat, emballage en het rekenwerk met betrekking tot een wis-

sel. Handelsrekenen, zeggen we nu. De relevantie voor het reken-wiskundeonderwijs van nu heeft zich gewijzigd.

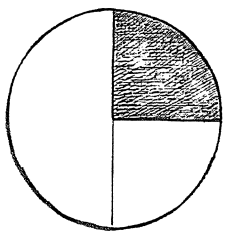
We kunnen ons afvragen of Rudolf Steiners aanwijzingen voor het leerplan gelden voor het hele gebied van de procenten. We menen van niet, de dominante context van weleer, de renteberekening, is vervangen door een scala van andersoortige contexten, waarvan vele een duidelijke maatschappelijke relevantie hebben zonder in direct verband te staan met het vermeerderen van eigen bezit of vermogen.

Bakens voor een rekenperiode over procenten zijn:
- Procenten worden visueel in beeld gebracht.
- Schattingen maken van percentages in concrete voorstellingen.
- Percentages van stroken; percentages bepalen met 'breukenelastiek' (met een indeling 'in 100'); gebruik leren maken van de dubbele lege getallenlijn.
- Gebruik leren maken van de verhoudingstabel (zie blz. 251) om percentages te berekenen.
- Procenten als groei/krimpfactor.
- Toepassingen.

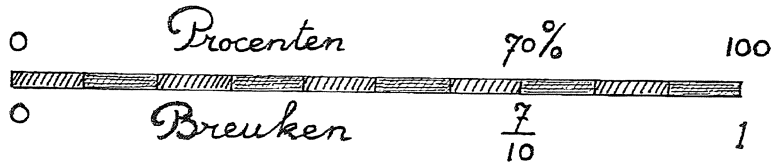
Procenten in de zesde en zevende klas

Vragen, waarvoor op dit terrein samen met de leerlingen een antwoord gezocht moet worden, zijn:
- Waar zijn we het % begrip (al) tegengekomen?
- Wat zijn procenten?
- Waarvoor gebruikt men procenten?
- Wat is de meerwaarde van procenten ten opzichte van gewone en decimale breuken?
- Hoe rekent men met procenten?
- Hoe kun je het reken- en denkwerk bij procenten ondersteunen?
- Wat zijn de knelpunten bij het procentrekenen?
- Welke toepassingen zijn er?
- Wat is het verband met decimale breuken?
- Wat is het verband met verhoudingen?

Gezien het veelvuldig gebruik van procenten en de vele contexten, waarin dit gebruik zinvol is, is het verstandig in de vijfde klas al te beginnen met een periode procenten. Het onderwerp procenten wordt eerst verkend, het gaat dan om een inventarisatie van hetgeen de kinderen al weten of denken te weten. Vervolgens wordt het onderwerp nader onderzocht met voorbeelden uit de eigen omgeving. Het gaat om de begripsvorming, het idee dat procenten bijzondere verhoudingen zijn (tegen de achtergrond van 100) of breuken, waarvan de eenheid niet 1 is maar 100 is geworden. Natuurlijk komen dan ook de visuele voorstellingen in beschouwing, ze zijn bij de breuken net aan de orde geweest.



En als bij de breuken de dubbele getallenlijn (zie blz. 218) in gebruik is genomen, kunnen de procenten ook op dat schematische niveau tot ontplooiing komen. De bemiddelende grootheid is nu 100.



Het werken met stroken kan hieraan voorafgaan, het breukenelastiek als procenten'meter' voor 'liefhebbers', als toegift er achteraan.
Procenten worden gekoppeld aan het begrip verhouding, de begripsvorming bij de kinderen gaat vooraf aan het verwerven van rekentechniek; van de traditionele '1% didactiek' is geen sprake.
Het verband met breuken kan als volgt duidelijk worden:
$\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0{,}25$ is 25 %

In de zesde klas kan een tweede periode aan (onder andere) de procenten gewijd worden. Nu kunnen de door Rudolf Steiner aangegeven ontwikkelingsdoelen verwezenlijkt worden. Ook kan de dubbele lege getallenlijn verder geëxploiteerd worden, de verhoudingstabel in gebruik worden genomen, veel toepassingen als uitgangspunt worden gekozen en, meer theoretisch van aard, het verband met de decimale breuken onderzocht worden.

Hoe maak je van $\frac{3}{8}$ de decimale breuk 0,375? Bijvoorbeeld via $\frac{1}{8}$, waarvan je wist dat het 0,125 is. Misschien wist je dat indirect, omdat bij het hoofdrekenen het getal 1000 al meer dan een keer ontbonden was in 8 x 125, eventueel aanvankelijk door drie keer te halveren: 1000; 500, 250, 125. Of nog indirecter, omdat je de decimale breuk 12,5 goed kunt thuisbrengen, als het achtste deel van 100. Maar de herleiding hoeft natuurlijk niet te lopen langs 3 x 0,125; je kunt ook $\frac{3}{8}$ ineens aanpakken, en de deling 8 / 3, 000 \... gaan maken
Wie bij deze opgave zijn zakrekenmachientje kan gebruiken, is er met vier welgekozen toetsen uit. Met de weg terug, om van 0,375 weer een gewone breuk te maken, kan een gewone zakrekenmachine geen hulp bieden. (Dat kan een bijzondere uitvoering van de zakrekenmachine wel. We denken hier aan de *Galaxy 9x* van Texas Instruments, waarop je met gewone breuken en decimale breuken kunt rekenen. Het is een zakrekenmachine die speciaal voor het onderwijs is ontworpen.)

Het rekenen met procenten moet na deze tweede rekenperiode natuurlijk niet in het vergeetboek raken. Welnu, het leven van alledag levert genoeg op om ze af en toe nog eens voor het voetlicht te halen. De fouten, die op dit gebied regelmatig gemaakt worden, vormen een rijke bron voor opgaven. Een voorbeeld:
'Het ministerie van onderwijs heeft de oorspronkelijke vraagprijs van 1,2 miljoen gulden voor de lhno-school de Oesterschelp in Tholen met bijna 100% verlaagd tot 608.000 gulden. Voor die prijs kocht de gemeenteraad maandagmiddag het pand aan. *De Eendrachtbode.*'

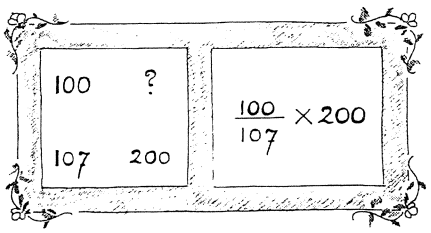
Rekenen met procenten (I)

De opgave uit de *Cijfferinge*, waarmee deze paragraaf begon, werd destijds opgelost met de (Verkeerde) Regel van Drieën. Een ondoorzichtige rekenregel, die bij juist gebruik tot de goede uitkomst voert. Is men in staat goed in verhoudingen (evenredigheden) te denken, dan kan hetzelfde resultaat, via dezelfde berekening, bereikt worden.

Hoe was het ook weer? Het ging om 200 gulden, te betalen over één jaar. De vraag was wat er er nú contant betaald zou moeten worden (bij een rente van zeven procent per jaar), zodat dit bedrag over één jaar aangegroeid is tot de verschuldigde 200 gulden. Je denkt dan eerst aan een groei van 100 (procent) tot 107 (procent). Dit leidt tot de evenredigheid 107 : 100 = 200 : ... Want de verschuldigde 200 gulden komt overeen met het aangegroeide bedrag
van 107, en het gevraagde bedrag met 100. De hoofdeigenschap van evenredigheden levert
107 x ... = 100 x 200, zodat je het gevraagde bedrag vindt via $\frac{100 \times 200}{107}$.

In een bekende rekenmethode uit de jaren vijftig (*Ik Reken*, van P. Bosdijk) werden evenredigheden geschreven in de vorm van verhoudingsblokken. Een prachtige didactische vondst, die in één slag de bekende verhoudingssommen van die tijd tot een peuleschil maakten.

Ons instapprobleem zou met de verhoudingsblokken aldus opgelost zijn:



In die tijd, maar ook daarvoor en ver daarna, namelijk tot op de dag van vandaag, worden procentberekeningen veelal via 'de 1%-methode' gemaakt. Het verhoudingsidee is hier volledig verdwenen, men volgt in dat geval slaafs de regel: 'neem eerst 1 procent'.

Ook in het geval dat bijvoorbeeld 10 procent van 15,45 moet worden berekend: 1% van 15,45 = 0,1545; 10% is 10 x 0,1545 = 1,545. Of, nog merkwaardiger, 75% van 64: 1% van 64 = 0,64; 75% is 75 x 0,64 = ... In plaats van $\frac{3}{4}$ te nemen van 64, bijvoorbeeld als de helft (32) plus de helft van de helft (16) is 48.

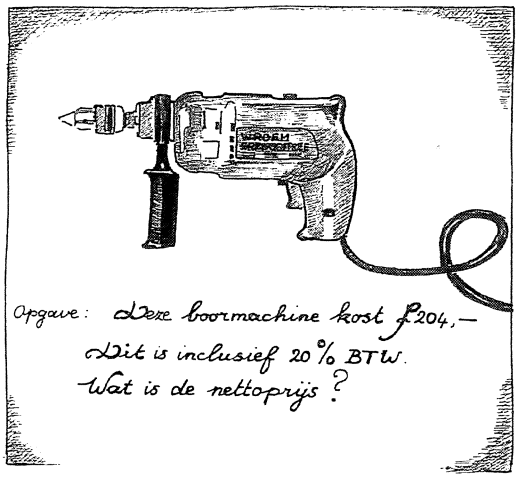
Rudolf Steiner zegt in de dertiende werkbespreking, dat iemand die deze berekeningen beheerst (bedoeld worden renteberekening en rabatberekening), de werkwijze van het hele rekenen beheerst. Met deze uitspraak heeft Rudolf Steiner waarschijnlijk op het centrale belang van verhoudingen willen wijzen. Het hele rekenen is doortrokken van het verhoudingsbegrip. Dat geldt niet alleen de procenten, maar ook de gewone en decimale breuken, de meetkunde, het meten, begrippen als (bevolkings-, kijk-, massa-)dichtheid, kans, gehalte en ook de getallenlijn. Merkwaardig genoeg is ons slechts één plaats bekend waar Rudolf Steiner

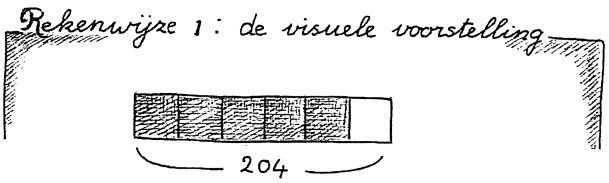
de verhoudingen noemt. Dat is in het leerplan voor de gecombineerde klas 5/6, opgesteld op 25 mei 1919: "Verhoudingen zouden heel goed in samenhang met procenten behandeld kunnen worden."
In het realistisch reken-wiskundeprogramma van nu wordt deze gedachte gerealiseerd, zij het dat het begrip verhouding het eerst onderwerp van studie is en het rekenen met procenten wordt gebaseerd op de notie van verhouding.

Rekenen met procenten (2)
Op dit gebied zijn niet zoveel opgaven te bedenken, die wezenlijk van elkaar verschillen.
Welke procentenopgaven kun je tegenkomen?
In de eerste plaats moet je een bepaald percentage van een gegeven bedrag kunnen berekenen. Al naar gelang de gegeven getallen kies je een geschikte rekenwijze. Soms is het voldoende een grove schatting te maken. In dat geval, maar niet alleen, is het bezitten van een visuele voorstelling een prettig hulpmiddel.
De omgekeerde opgave is lastiger, je moet bijvoorbeeld berekenen hoeveel procent 37,50 is van 245 (gulden). In het algemeen leerde men daar, op basis van de 1%-methode, een algoritme voor. Maar dat zouden we nu handiger kunnen doen met de zakrekenmachine, denkend aan verhoudingen en decimale breuken. Je toetst 37.5 : 245 = en leest af 0.1530612. Wetend dat een percentage de verhouding tot 100 aangeeft, neem je van het venstergetal alleen het deel wat je kunt gebruiken: 0,15. Dat is $\frac{15}{100}$, of wel 15 procent. Een goede rekenaar vraagt zich toch nog even af of hij geen (toets)fout gemaakt heeft, en maakt daarom nog een schatting. Hoeveel procent is 40 van de 250? O, dat is 160 van de 1000, dat is 16 van de 100, dat is 16 procent. Niet gek!

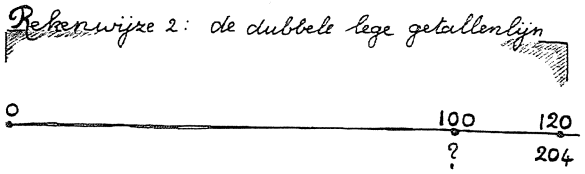
Een ander type opgaven gaat over groei of krimp, prijsstijging of prijsdaling, loonsverhoging of premieverlaging en dergelijke. In het algemeen werden dit soort opgaven in de vorige categorie geplaatst.
Bijvoorbeeld: op een bedrag van 65 gulden wordt 15% korting gegeven. Hoeveel te betalen? Neem 1% van 65, ... Momenteel, mede met het oog op komende wiskunde, pakken we de zaak anders aan: te betalen 0,85 x 65 = 55,25.

We zetten de rekenwijzen nog even op een rijtje aan de hand van het volgende sommetje

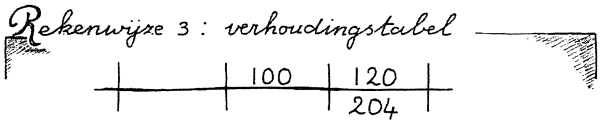




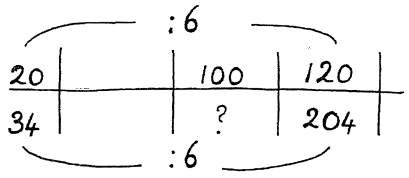
Rekenwijze 1: de visuele voorstelling
Hier is de situatie van het 'bedrag + BTW' op een strook afgebeeld. Het verdelen van de strook, in zes gelijke porties, vraagt inzicht in de betekenis van '20% erbij'. Is de voorstelling tot stand gekomen, dan is het rekenwerk uit het hoofd te doen: deel 204 door 6; dat is 102 : 3, dat is (bijvoorbeeld) 99 : 3 = 33 plus 3 : 3 = 1, samen 34. Nettoprijs, zie strook, 5 x 34 = 170.

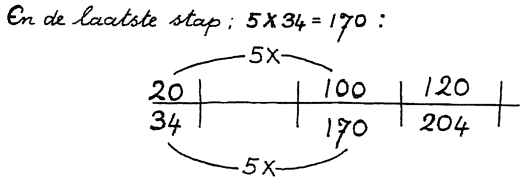


Rekenwijze 2: de dubbele lege getallenlijn
Deze is eerst in het geval van de gewone breuken in de vijfde klas geïntroduceerd en wat daar geleerd is, kan nu zijn vruchten afwerpen. De bemiddelende grootheid is in het geval van de procenten altijd 100 (zo nodig 1000).
In dit geval is er sprake van een denkmodel. De lijn noodt uit om de gegeven getallen op een rijtje te zetten, hetgeen aanwijzingen geeft voor de uit te voeren berekening. Hoe kom ik van 204 naar ...? Dat moet op dezelfde manier als van 120 naar 100. Een stap van 20 terug, dat is (verhoudingsdenken!) een zesde deel terug.
Hier wordt duidelijk dat bekendheid met het werken met verhoudingen op dit niveau heel noodzakelijk is.



Rekenwijze 3: verhoudingstabel
De verhoudingstabel is een bruikbaar notatieschema dat grote verwantschap vertoont met het eerder genoemde verhoudingsblok. Het schema is zo ingericht, dat de berekening er stap voor stap en meer in algoritmische zin gemaakt kan worden.
Hier staat de vraag in schemavorm geformuleerd: als 204 overeenkomt met 120 (procent), wat komt dan overeen met 100 (procent)? Rekentechnisch ligt het voor de hand om door 6 te delen:





Rekenwijze 4: de vermenigvuldigingsfactor
Deze aanpak is al eerder genoemd. Hij is meer verwant met het letterrekenen en de algebra. Nu kunnen we hem nader uitwerken. De vraag was hoe we 100 procent kunnen vinden als 204 gulden gelijk is aan 120 procent.
Noem het gevraagde nettobedrag G. G staat dus voor een nog niet bekend getal, dat hier voor 100 procent doorgaat. Er komt 20 procent bij, dat is 0,20 x G. G groeit zo aan tot G + 0,20 G = 1,20 x G. Hier staat de essentie van deze rekenwijze: 120% van G is hetzelfde als 1,20 x G (of 1,2 x G). Anders gezegd:
Bij een groei van 20% is er een vermenigvuldigingsfactor van 1,20. En natuurlijk bij een krimp van 20% is er een vermenigvuldigingsfactor van 0,80. En bij een prijsverlaging van 12% worden de prijzen met 0,88 vermenigvuldigd.
De boormachine kostte dus netto 204 : 1,2 gulden, dat is 170 gulden.

Een verrassend probleem:
De boormachine kostte netto f 170,00. Maar er moest f 204,00 betaald worden. Dat scheelt f 34,00.Hoeveel procent is de nettoprijs lager dat hetgeen ervoor betaald moest worden? Hoeveel procent is 34 van 204? Dat is (schatting) krap 17%. Hoe zit dat nu met die 20% BTW?
Zie ook het krantebericht (probleem) over de lhno-school in Tholen (blz. 257).

Een nog verrassender probleem:
Bij een discount wordt op een artikel van f 375,00 12% korting gegeven. Bij de kassa moet je nog 18% BTW betalen. Zou het niet goedkoper zijn als je eerst de BTW betaalde, en dan van dat hogere bedrag de korting nam?
Nee hoor, de volgorde doet er niet toe. Reken maar mee. Geval 1 leidt tot 0,88 x 1,18 x 375 en geval 2 tot 1,18 x 0,88 x 375. Je hoeft niet eens te rekenen, je doorziet het met deze rekenwijze direct.

Ideeën voor rekenwerk met procenten

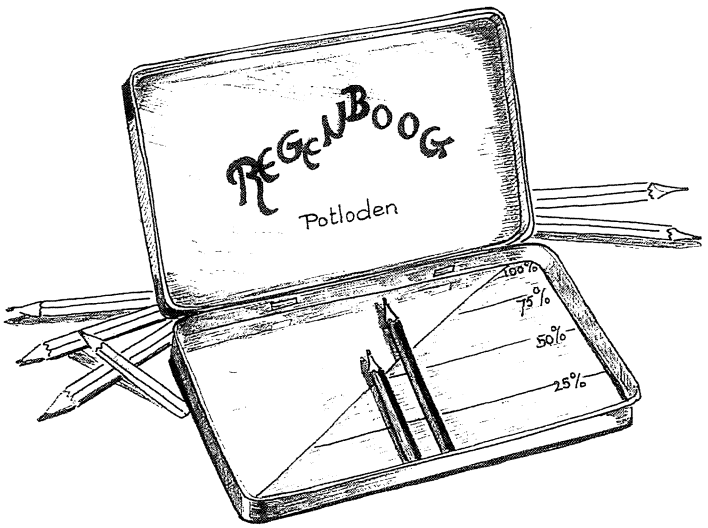
Na de tekenles werden alle citroengele kleurpotloden verzameld. Toen ze naast elkaar gelegd werden, bleek dat sommige potloden veel vaker gebruikt werden dan andere. Hoe kun je iets (getalsmatigs) zeggen van dat gebruik? Met procenten! Hoeveel procent is van een gegeven potlood gebruikt?
Al snel besloten we om de lengte van een ongebruikt potlood op 100 procent te stellen. Dat potlood bleek 17 cm lang. We dachten meteen aan een strook van 17 cm, die op 100% moest worden gesteld. Een dubbele getallenlijn mag ook.
Iedereen kon aan het werk om de verbruikspercentages van de potloden te bepalen. Het breukenelastiek werd ook nog even erbij gehaald. Dat was om de verdeling van 17, in tien gelijke delen snel af te handelen.

Na het kleurpotlodenvraagstuk heb ik de 'procentenmeter' geïntroduceerd. Met dat 'instrument' kun je de kinderen mooi de relativiteit van procenten laten zien.

De overeenkomst met het breukenelastiek is treffend en de kinderen moeten dat zelf kunnen ontdekken. De uitrekking van het elastiek, waarbij de onderlinge verhoudingen in takt blijven, komt overeen met de meetkundige vermenigvuldiging, die op de percentagemeter tot stand wordt gebracht.

De kleurpotlodendoos

Hoeveel procent is het potlood afgeslepen? Zie tekening hieronder. Schuif het hele potlood zover naar rechts, dat de punt precies tegen de schuine lijn, die naar 100% loopt, aan past. Trek dan een lijn door het startpunt links onder en de bovenkant van het afgesleten potlood. Die lijn snijdt de vertikale 'schaal' rechts in een punt P. Als de schaal van 0 tot 100 netjes is aangegeven, kun je het percentage zo aflezen.

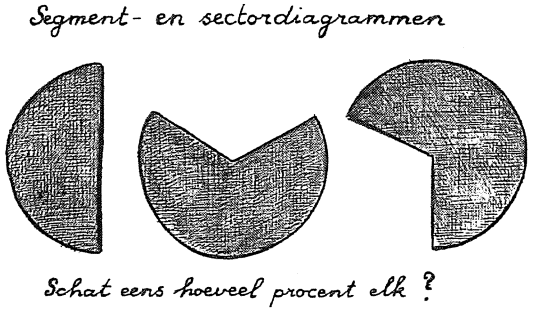


Het kledingstuk

Tijdens een gesprek over procenten kwam al snel naar voren dat in bijna ieder kledingstuk een etiket zit waarop de samenstelling van de vezels vermeld staat. Er waren kinderen die konden vertellen waarom de fabrikant dat deed. Voor de aardigheid hebben we een paar kledingstukken gewogen en vervolgens uitgerekend hoeveel gram wol (knotten van 50 en/of van 100 g) (katoen) ervoor gebruikt was.

Segment- en sectordiagrammen

We hebben eerst uit de vrije hand cirkels verdeeld in gegeven percentages. Ook hebben we grove schattingen gemaakt bij gegeven sectordiagrammen.



Voorbeeld 2: Zeventien procent van ...
Een reclame campagne van Dirk van den Broek:

Moet dat eigenlijk niet ruim 14 procent zijn?

Voorbeeld 3: Verdubbeling
United verdubbelt de toegangsprijzen
MANCHESTER (Rtr) -Manchester United verhoogt volgend seizoen de prijs van de toegangsbewijzen met 50 procent ...

Voorbeeld 4: Honderd procent per dag?
(...) Het inflatiespook, dat vrijwel heel Latijns Amerika tot zijn jachtgebied heeft gemaakt, is kind aan huis in Nicaragua. In 1988 gierde de geldontwaarding omhoog tot een percentage tussen de 32.500 en 36.000. "Ik zeg altijd maar: honderd procent per dag. Dat rekent lekker makkelijk", grapt een westerse diplomaat in Midden-Amerika. (...)

Tenslotte
Hoe zou men de opgave van Willem Bartjens, waarmee deze paragraaf over procenten begint, nu -in de zevende klas- oplossen? Misschien wel met de vermenigvuldigingsfactor en een zakrekenmachine?

6.4 Geometrie

Voorbereidend periodeonderwijs meetkunde in de vijfde klas
De eerste klasser weet het al; als je later groot bent en bijna aan het eind van de gang zit (in de zesde klas) maak je van die mooie grote tekeningen met 'rondjes door elkaar en allemaal kleuren!' Een geliefd toekomstbeeld om naar uit te zien!
De meetkunde, als wiskundig vak, vindt zijn aanvang in het onderwijs als het heldere denken begint te ontwaken. Het oordelend vermogen van de leerlingen wordt sterker en de zesdeklasser vindt zijn weg in het sociale leven en gaat op zoek naar 'law and order'. De kinderen gaan, zogezegd in de voetsporen van Caesar, letterlijk en figuurlijk het dagelijks leven strijdlustig tegemoet. Dam- en schaakspel, door orde en wetmatigheid geleid, worden geliefde en zinvolle bezigheden in regenachtige pauzes.

We gaan er van uit dat het denken van een kind zich in dezelfde fasen ontwikkelt (in één leven), als het denken van de gehele mensheid in de opeenvolgende cultuurtijdperken.
In de Vrije School zijn de meetkundelessen bedoeld als een bijzondere bijdrage aan de scholing van het denken. Het leerplan voor geometrie (en algebra) laat